Aula 6 - Variáveis aleatórias contínuas

PhD. Wagner Hugo Bonat

Laboratório de Estatística e Geoinformação-LEG
Universidade Federal do Paraná

1/2017

Laboratório de Estatística
e Geoinformação

Exemplo 6.1

- Estudos anteriores revelam a existência de uma grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto, sua profundidade ainda não foi determinada, sabendo-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

Função densidade de probabilidade

- Dizemos que $f(x)$ é uma função contínua de probabilidade ou função densidade de probabilidade para uma v.a. contínua X, se satisfaz duas condições:
  1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$;
  2. A área definida por $f(x)$ é igual a 1.
- Usando cálculo diferencial e integral, (2) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Para calcular probabilidade temos que para $a < b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

a integral, indica a área sob a função f definida pelo intervalo $[a,b]$.

Exemplo 6.2

- Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para a variável C, comprimento de fósseis da região (em cm). Suponha que C é uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40}(\frac{c}{10} + 1) & \text{se} \quad 0 \leq c \leq 20; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

- Exemplo 6.3 tarefa de casa.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Medidas de posição para va contínuas

- O valor esperado ou média da v.a. contínua X com função densidade $f(x)$, é dado pela expressão:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

- A mediana é o valor MD que tem a propriedade de

$$P(X \geq Md) \geq 0.5 \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq 0.5.$$

- A moda é o valor Mo tal que,

$$f(Mo) = \max_x f(x).$$

Variância para v.a. contínuas

- Para uma v.a. X com densidade $f(x)$, a variância é dada por

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

- Expressão alternativa

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

onde

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Exemplo 6.4

- Para a variável C do exemplo 6.2 calcular $E(C)$ e $Var(C)$.

Modelo Uniforme contínuo

- Uma v.a. X tem distribuição Uniforme contínua no intervalo $[a,b]$, $a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

- Neste caso $E(X) = \frac{a+b}{2}$ e $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 6.5

- Com o objetivo de verificar a resistência à pressão de água, os técnicos de qualidade de uma empresa inspecionam os tubos de PVC produzidos. Os tudos inspecionados têm 6 metros de comprimento e são submetidos a grandes pressões até o aparecimento do primeiro vazamento, cuja distância a uma das extremidades (fixada à priori) é anotada para fins de analise. Escolhe-se um tubo ao acaso para ser inspecionado. Queremos calcular a probabilidade de que o vazamento esteja, a no máximo 1 metro das extremidades.

Modelo Exponencial

- Uma v.a. contínua X assumindo valores não negativos, segue o modelo exponencial com parâmetro $\alpha > 0$ se sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \exp^{-\alpha x} & \text{se} \quad x \leq 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

- Neste caso $E(X) = \mu = \frac{1}{\alpha}$ e $Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.
- $P(a < X < b) = \int_a^b \alpha \exp^{\alpha x} dx = \exp^{-\alpha a} - \exp^{-\alpha b}$.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 6.6

- Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através da distribuição Exponencial com parâmetro $1/8000$. Determine a proporção de troca por defeito de fabricação.

Exemplo 6.7

- O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}2$. Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Modelo Normal

- Uma v.a. contínua X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2, se sua função de densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{para} \quad -\infty, x < \infty.$$

- Notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.
- Exemplo cálculo de probabilidade usando transformação Z.

Exemplo 6.8

- Doentes sofrendo de certa moléstia são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma densidade Normal de média 15 e desvio padrão 2 (em dias). Seja X o tempo de cura e, portanto temos $X \sim N(15,4)$. Calcule a proporção de pacientes que demorão mais de 17 dias para se recuperar. Calcular a probabilidade um paciente ao acaso demorar menos de 20 dias para se recuperar. Qual o número esperado de dias para recuperação?

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 6.9

- Estudo do Sindicato dos Bancários indica que cerca de 30% dos funcionários de banco têm problemas de estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual seria a probabilidade de pelo menos 50 com essa doença?

Exemplo 6.10

- Um serviço de fiscalização é criado para averiguar se garrafas de um certo refrigerante contém, de fato, o volume especificado pelo fabricante. Para tanto, 10 garrafas do produto são compradas no varejo, em várias regiões da cidade. Cada uma dessas garrafas é esvaziada e o volume de seu conteúdo, que denotaremos por V é aferido. Uma vez obtidos os 10 valores, a média aritmética M é calculada e, se $M < 290$ mililitros (ml), a companhia é multada. Estudos na linha de produção do fabricante mostraram que variações sempre ocorrem, mesmo se as especificações forem seguidas. Por essa razão, considera-se o volume do conteúdo das garrafas como seguindo o modelo Normal, com média $\mu = 300$ ml e desvio-padrão $\sigma = 25$ ml. Gostaríamos de calcular qual é a probabilidade de que o fabricante seja multado injustamente.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 6.11

- Uma corretora negocia títulos na Bolsa de Valores e utiliza um modelo probabilístico para avaliar seus lucros. Suas aplicações financeiras de compra e venda atingem três áreas: agricultura, indústria e comércio. Admita que o seguinte modelo representa o comportamento do lucro diário da corretora (em milhares):

$$L = 2L_A + 5L_I + 3L_C,$$

onde L_A, L_I e L_C representam, os lucros diários nos setores de agricultura, indústria e comércio. As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são $L_A \sim N(3{,}4)$, $L_I \sim N(6{,}9)$ e $L_C \sim N(4{,}16)$. Supondo independência entre os três setores, qual será a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exercícios recomendados

- Seção 6.1 - 1,2,3,4 e 5.
- Seção 6.2 - 1 a 9.